

Arbeitsblatt 13: Die Ableitung einer Verkettung von Funktionen

Ziel: Es soll eine Regel für die Ableitung einer Verkettung $f(x) = g(h(x))$ gefunden werden, falls die Ableitungen von g und h bekannt sind.

Aufgabe 1 In der Tabelle werden nur Verkettungen $f(x) = g(h(x))$ untersucht, die man nach Umformen des Funktionsterms mit den schon bekannten Ableitungsregeln ableiten kann.

Beispiel: $f(x) = (3x)^2$ ist eine Verkettung. Wie lautet die Ableitung?

f kann man ohne Verkettung schreiben: $f(x) = 9x^2$. Die Ableitung ist: $f'(x) = 18x$.

a) Ergänzen Sie die Tabelle. In der rechten Spalte liegt das Problem!

Funktion $f(x) =$	$f'(x) =$	f als Verkettung	Wie ergibt sich $f'(x)$ direkt aus der Verkettung?
$9x^2$	<u>$18x$</u>	$h(x)=3x$; $g(x)=x^2$ $f(x) = g(h(x)) = (3x)^2$	<u>$18x$</u> =? $2 \cdot (3x)^1 = 6x$ ist falsch; Korrekturfaktor?
$4x^2$	<u>$8x$</u>	$h(x)=$; $g(x)=$ $f(x) = g(h(x)) = (2x)^2$	<u>$8x$</u> =? $2 \cdot (2x)^1 =$
$4x^2+4x+1$		$h(x)=$; $g(x)=$ $f(x)=g(h(x))=(2x+1)^2$	
$x^4 + 2x^2 + 1$		$h(x)=$; $g(x)=$ $f(x)=g(h(x))=(x^2+1)^2$	
		$h(x)=$; $g(x)=$ $f(x)=g(h(x))=(x-3)^2$	

b) Aus der Tabelle kann man eine Vermutung zur Ableitung einer Verkettung erschließen.

Ergänzen Sie die Worte „innere(n)“ bzw. „äußere(n)“. Vermutung:

Leite zunächst die _____ Funktion ab; behandle dabei die _____ Funktion als Variable.

Multipliziere diesen Term mit der Ableitung der _____ Funktion.

c) Beurteilen Sie, ob hier richtig abgeleitet wurde.

$f(x) = (6x + 4)^2$; $f'(x) = 2 \cdot (6x+4) \cdot 6$ ☐ richtig ☐ falsch. Korrektur: $f'(x) = \dots\dots\dots$

$f(x) = (2x - 4)^3$; $f'(x) = 3 \cdot (2x - 4)^2$ ☐ richtig ☐ falsch. Korrektur: $f'(x) = \dots\dots\dots$

$f(x) = (2x - 4)^3$; $f'(x) = 3 \cdot (2x - 4) \cdot 2$ ☐ richtig ☐ falsch. Korrektur: $f'(x) = \dots\dots\dots$

$f(x) = (x^2 + 7)^2$; $f'(x) = 2 \cdot (x^2 + 7) \cdot 2$ ☐ richtig ☐ falsch. Korrektur: $f'(x) = \dots\dots\dots$

Aufgabe 2a) Die in Aufgabe 1 gefundene Ableitungsregel für Verkettungen heißt **Kettenregel**. Ergänzen Sie im Kasten mit Hilfe der Kärtchen eine mathematische Formulierung von f' .

h'

$(h(x))$

g'

(x)

$\cdot$

Ist $f(x) = g(h(x))$ eine Verkettung von g und h , dann kann man die Ableitung folgendermaßen erhalten: $f'(x) =$

b) Leiten Sie mit der Kettenregel ab. (Ergänzen Sie)

$f(x) = (\sin(x))^2$; $f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \dots\dots\dots$

$f(x) = (4x + 1)^{-2}$; $f'(x) = \dots \cdot (4x + 1)^{-3} \cdot \dots =$ (mit Bruchstrich) $\dots\dots\dots$

$f(x) = \frac{1}{3x+5}$ = (ohne Bruchstrich) $\dots\dots\dots$; $f'(x) = \dots\dots\dots =$ (mit Bruchstrich) $\dots\dots\dots$