Die Voraussetzungen aus Klasse 8-10

I. Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zusammenstellung der Voraussetzungen:

- **Pfadregel**
- Ereignisse $A \cup B$ $A \cap B$
- Additionssatz $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Gegenereignis $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
- Unabhängigkeit von Ereignissen $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- Zufallsvariable, Erwartungswert

$X;\quad E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$

II. Binomialverteilung

Bernoulli – Experiment

Bernoullikette, Formel von Bernoulli

Binomialkoeffizienten

Möglichkeit A
Möglichkeit B

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = B_{n;p}(k)}$$

Binomialverteilung,
Erwartungswert

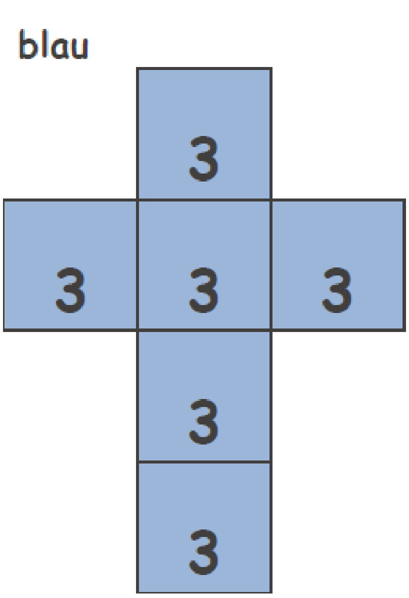
$$\boxed{\mu = E(X) = n \cdot p}$$

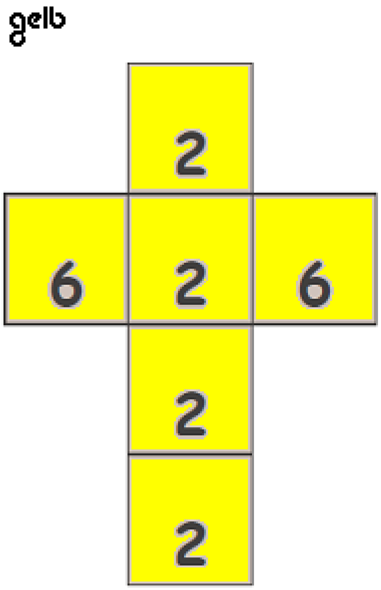
Praxis der Binomialverteilung

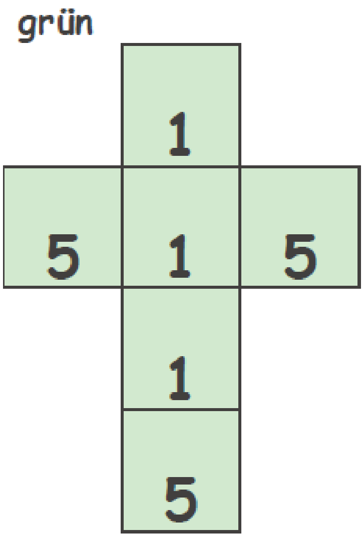
I. Die Grundlagen

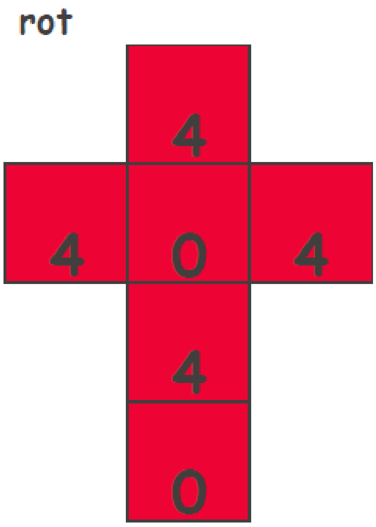
Pfadregel - eine problemorientierte Einführung

Auf dem Tisch liegen 4 Würfel mit den abgebildeten Netzen (Efron-Würfel).
Schüler und der Lehrer wählen jeweils einen Würfel und würfeln gemeinsam.
Es gewinnt die größere Augenzahl. Ein Spiel besteht aus 11 Würfen.
Sieger ist des Spiels ist, wer bei mindestens 6 der Würfe die größere Augenzahl hatte.
Die Schüler wählen ihren Würfel <u>zuerst</u>, <u>dann</u> der Lehrer seinen.

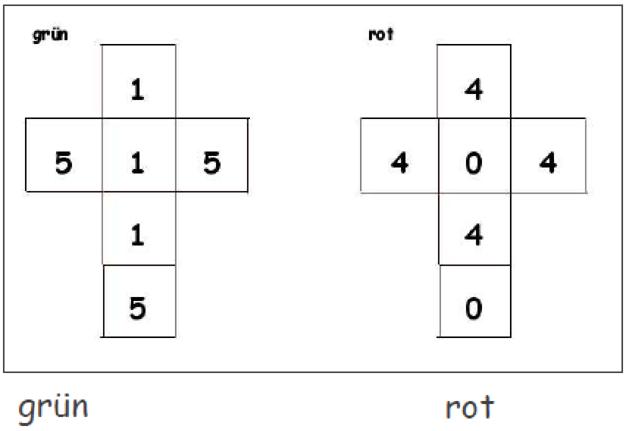


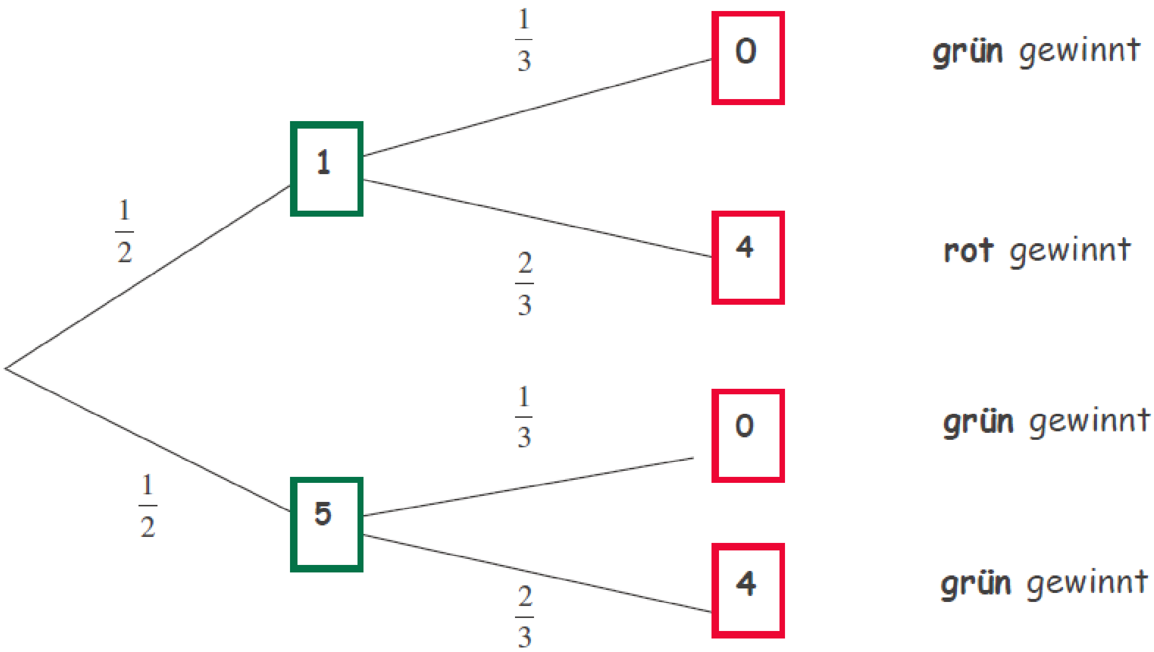






Mathematische Darstellung und Herleitung der Pfadregel am Beispiel „grün gegen rot“





- **Häufigkeitsüberlegung**: Was erwartet man bei 3000, 6000, … Versuchen?
- Daraus Ermittlung der zu erwartenden relativen Häufigkeiten.
- Erkennen der Pfadregeln:

$$P(\text{grün gewinnt}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Ereignisse

Die **Ergebnismenge** eines Zufallsexperiments sei $S=\{e_1;e_2;...;e_n\}$.
Eine Teilmenge $A\subset S$ heißt **Ereignis**.
Die **Wahrscheinlichkeit** für $A=\{e_1;...e_k\}$ ist: $P(A)=P(e_1)+...+P(e_k)$

Einfache Verknüpfungen von Ereignissen

$A\cup B$ enthält alle Ergebnisse, die zum Ereignis A oder zum Ereignis B (oder zu beiden) gehören.
$A\cap B$: enthält alle Ergebnisse, die sowohl zum Ereignis E als zum Ereignis F gehören.

Additionssatz:

Beispiel

Maren möchte gern Sechsen würfeln. Sie überlegt: Wenn ich einen Würfel nehme, ist die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs $\frac{1}{6}$*, wenn ich zwei Würfel nehme, ist sie* $\frac{2}{6}$ *wenn ich drei Würfel nehme, ist sie* $\frac{3}{6}$ *usw. ..*

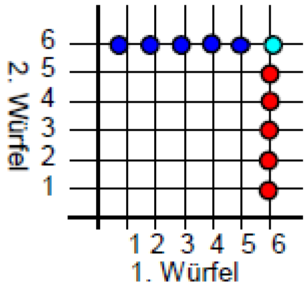
Es gibt 36 Ergebnisse, die man in der Form 11, ... , 66 notieren kann.

A: Sechs im ersten Wurf = {61,62,63,64,65,66}; $P(A) = \frac{1}{6}$

B: Sechs im zweiten Wurf = {16,26,36,46,56,66}; $P(B) = \frac{1}{6}$

$A \cup B$ = {61,62,63,64,65,66,16,26,36,46,56}; $P(A \cup B) = \frac{11}{36}$.

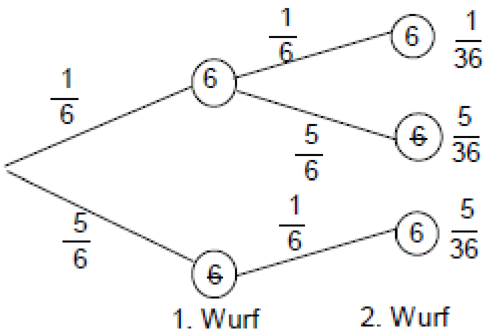
$A \cap B = \{66\}$ $\qquad P(A \cap B) = \frac{1}{36}$



Das Ergebnis, das in $A \cap B$ liegt, wird also doppelt gezählt, wenn man einfach P(A) + PB) rechnet, daher ist $P(A \cap B)$ zu subtrahieren:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

Die Zählweise kann auch mit einem Diagramm verdeutlicht werden.
Hier kann bewusst gemacht werden, dass der Additionssatz beim Arbeiten mit Baumdiagrammen eigentlich schon verwendet wird,
siehe Abbildung. Die Zählweise ist dabei nur etwas anders.



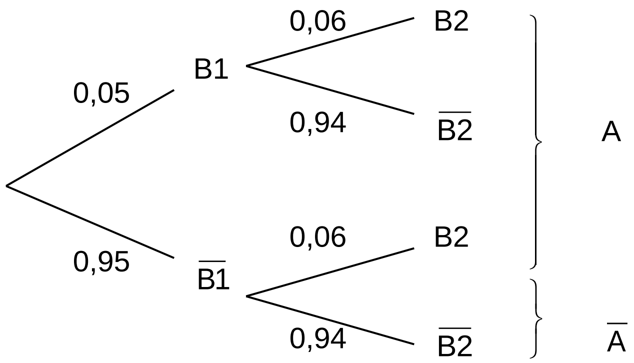
Additionssatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Gegenereignisse

Zu jedem Ereignis A gehört ein Gegenereignis $\overline{A}$, das alle Ergebnisse enthält, die nicht zu A gehören. ($A \cup \overline{A} = S$)

Beispiel *Eine Maschine besteht aus zwei Bauteilen. Aus vielen Kontrollen weiß man, dass ein Bauteil mit der Wahrscheinlichkeit 0,05, das andere mit der Wahrscheinlichkeit 0,06 defekt ist. Die Maschine wird nicht ausgeliefert, wenn mindestens ein Bauteil defekt ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis* ***A: „Mindestens ein Bauteil ist defekt“****?*

B1: Bauteil1 ist defekt, B2: Bauteil 2 ist defekt.



Es gilt:
$P(A) = 0{,}05 \cdot 0{,}06 + 0{,}05 \cdot 0{,}94 + 0{,}95 \cdot 0{,}06 = 0{,}107$

Das Gegenereignis zu A ist $\overline{A}$ **: „Kein Bauteil ist defekt".**

Seine Wahrscheinlichkeit lässt sich sehr viel einfacher berechnen: $P(\overline{A}) = 0{,}95 \cdot 0{,}94 = 0{,}893$.

Und es gilt: $\mathbf{P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}893 = 0{,}107}$

Unabhängigkeit von Ereignissen

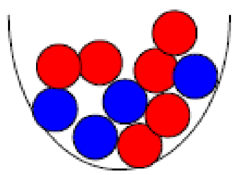
Zunächst eher etwas unscharf an die Umgangssprache angelehnt:

Unabhängig sind Ereignisse, wenn sie sich nicht beeinflussen.

Wenn zwei Ergebnisse unabhängig sind, gilt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Dies kann an einem Beispiel erarbeitet werden.

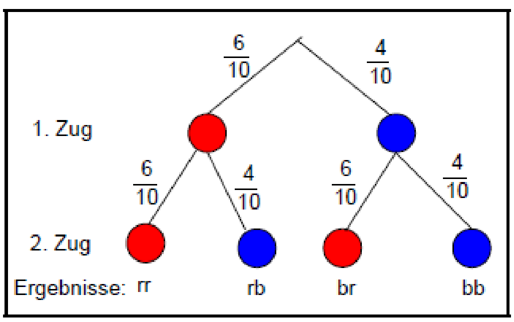
Ausgangspunkt:
Für $P(A \cup B)$ haben wir einen Zusammenhang gefunden (Additionssatz).
Gibt es auch für $P(A \cap B)$ einen?

Beispiel *Eine Schale enthält sechs rote und vier blaue Kugeln, und es werden zufällig zwei davon gezogen.*
Die Ereignisse
*A :"**im ersten Zug rot**" und B: "**im zweiten Zug rot**" werden untersucht.*
Vergleiche $P(A \cap B)$, $P(A)$ *und* $P(B)$..

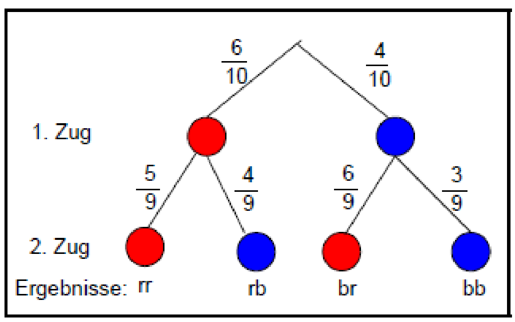


Es ist A = {rr, rb} und B = {rr, br} sowie $A \cap B$ = {rr} ("in beiden Zügen rot").

Ziehen **mit** Zurücklegen



Ziehen **ohne** Zurücklegen



Nach der Pfadregel und der Summenregel ergibt sich:

$$P(A)=\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{6}{10}$$
$$P(B)=\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{6}{10}$$
$$P(A\cap B)=\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{36}{100}$$
also: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$P(A)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{6}{10}$$
$$P(B)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{6}{10}$$
$$P(A\cap B)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{30}{90}$$
also: $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$

Zufallsvariable; Erwartungswert

Eine **Zufallsvariable** X ist eine Abbildung von S in $\mathbb{R}$.
Mit $X=k$ wird das Ereignis bezeichnet, das aus allen Ergebnissen besteht, die auf k abgebildet werden.

Die Wahrscheinlichkeiten $P(X=k)$ werden bei einer (diskreten) Verteilung X in einer Tabelle zusammengefasst, die man **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von X nennt.

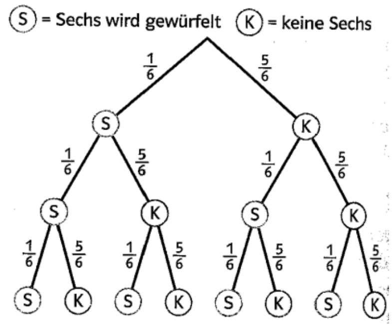
Einführung an einer Spielsituation:
Ein Spieler setzt einen Euro und wirft einen Würfel dreimal. Für jede 6 erhält 1 € ausbezahlt. Untersuche, wie viel man bei einem Spiel gewinnen oder verlieren kann.

Man untersucht für alle möglichen Würfe die “Variable”

Gewinn X = Auszahlung - Einsatz.

Die Tabelle zeigt alle Möglichkeiten; zusätzlich sind die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten angegeben: die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von X. (Jedem Gewinn ist eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet).

Beispiel:
Dreimal Würfeln. Einsatz 1€.
Gewinn für jede 6 ist 1 €.
Die Zufallsvariable X beschreibt den Gewinn.



Z.B. $X=0$ ist das Ereignis $\{KKS; KSK; SKK\}$.

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

k	-1	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Erwartungswert:
$E(X)=(-1)\cdot\frac{125}{216}+0\cdot\frac{75}{216}+1\cdot\frac{15}{216}+2\cdot\frac{1}{216}=-0{,}5$

Da die Variable X vom Zufall abhängt, nennt man sie **Zufallsvariable**.
Die Werte der letzten beiden Zeilen heißen Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

Bei dem obigen Spiel kann man fragen, ob das Spiel auf lange Sicht günstig oder ungünstig für den Spieler ist.
Bei z.B. 216 Spielen wird er (in €) insgesamt etwa den "Gewinn"

$$125\cdot(-1) + 75\cdot 0 + 15\cdot 1 + 1\cdot 2 \text{ €} = -108$$

erzielen.

Pro Spiel beträgt also der durchschnittliche “Gewinn” in €: (Mittelwertbildung)

$$\frac{125\cdot(-1) + 75\cdot 0 + 15\cdot 1 + 1\cdot 2}{216}=\frac{-108}{216}=-0{,}50$$

Das kann man auch so schreiben:

$$(-1)\cdot\frac{125}{216}+0\cdot\frac{75}{216}+1\cdot\frac{15}{216}+2\cdot\frac{1}{216}=-0{,}5$$

Da man den durchschnittlichen Gewinn auf lange Sicht etwa erwarten kann, nennt man ihn **Erwartungswert E(X)** für den Gewinn X.

Allgemein:
Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen gibt an, welcher Wert durchschnittlich bei einer großen Zahl von Durchführungen des Zufallsversuchs für die Zufallsvariable zu erwarten ist.
Der Erwartungswert wird folgendermaßen berechnet:
1. Man bestimmt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen.
2. Man multipliziert jeden Wert der Zufallsvariablen mit seiner Wahrscheinlichkeit und addiert die Produkte.
Bezeichnet man die Werte der Zufallsvariablen mit x_1, x_2, ... , x_n, so kann man E(X) mit der Formel $E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + ... + x_n \cdot P(X = x_n)$ berechnen.

Bernoulli-Experimente

Ein Zufallsexperiment, das nur zwei Ergebnisse hat, nennt man ein **Bernoulli-Experiment**
Z.B.

- Werfen einer Münze: **W –Z**
- Würfeln: **6 oder keine 6**

Ein Bernoulli-Experiment ist also ein spezieller Zufallsversuch mit genau 2 Ausgängen **T** („Treffer“) und **N** („Niete“) oder **1, 0** mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten **p** und **q = 1 – p** .

Wird ein Bernoulli-Experiment **n mal unabhängig** wiederholt, so spricht man von einer **Bernoulli-Kette** der Länge n.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer bei n Wiederholungen?

Beschreibt die Zufallsvariable X die Anzahl der Treffer bei einer Bernoulikette der Länge n, so heißt die Frage:

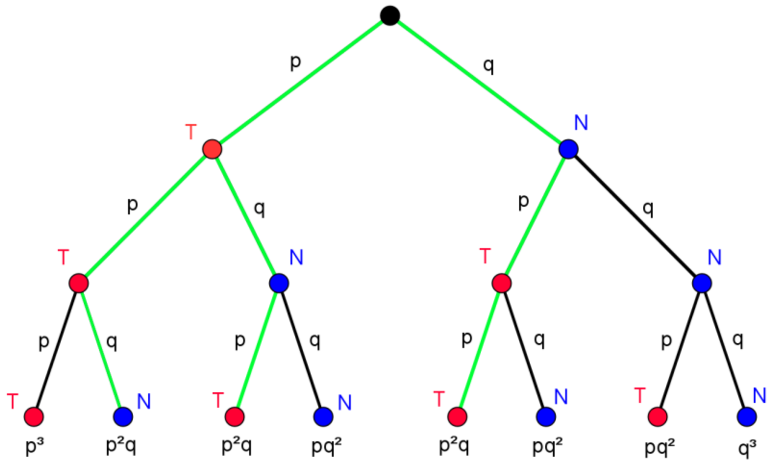
Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit P(X = k) für genau k Treffer ($0 \le k \le n$) ***?***

<u>Möglichkeit A</u>

Beispiel:
Multiple-Choice-Test: n Fragen, jeweils vier vorgegebene Antworten, von denen nur eine richtig ist. Ein Kandidat kreuzt rein zufällig je eine Antwort an.

Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{4}$; Wahrscheinlichkeit für "Niete": $q = 1 - p = \frac{3}{4}$.

1) n = 3 (*Geogebra → Binomi)*



Wahrscheinlichkeit P(X = 2) für genau zwei Treffer:

- Jeder Pfad hat die Wahrscheinlichkeit p^2q.
- Es gibt **3** Pfade, die zu X = 2 führen (Abzählen!).

- Somit gilt: $P(X=2)=3\cdot p^2\cdot q=\dfrac{9}{64}$.

2) **n = 4** (*Geogebra → Binomi)*

Wahrscheinlichkeit P(X = 2) für genau zwei Treffer:

- Jeder Pfad hat die Wahrscheinlichkeit p^2q^2.
- Es gibt **6** Pfade, die zu X = 2 führen (Abzählen!).
- Somit gilt: $P(X=2)=6\cdot p^2\cdot q^2=\dfrac{27}{128}$.

Die Anzahl der Pfade mit zwei Treffern hängt von der Länge n der Bernoullikette ab:

Neue Schreibweise:

n = 3: $\binom{3}{2}=3$ (lies "2 aus 3" oder “3 über 2")

n = 4: $\binom{4}{2}=6$ (lies "2 aus 4" oder “4 über 2")

3) Verallgemeinern auf allgemeine Kettenlänge n und Trefferzahl k.

- Weitere Beispiele wie oben für n = 2 , 3 , 4 mit verschiedenen Trefferzahlen k, insbesondere $\binom{n}{0}=1$. (*Geogebra*)

  Die Anzahl der Pfade für k Treffer bei n Wiederholungen $\binom{n}{k}$ heißt **Binomialkoeffizient**.

- Die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer bei n Wiederholungen beträgt:

  $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$

- Dabei zählt die Zufallvariable X die Anzahl der Treffer.

Zusammenfassung

Formel von Bernoulli

Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p lässt sich die Wahrscheinlichkeit für k-Treffer nach der Bernoulli-Formel berechnen:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot\underbrace{p^k\cdot(1-p)^{n-k}}=B_{n;p}(k)$$

Anzahl der Pfade mit k Erfolgen

Wahrscheinlichkeit für einen Pfad mit k Erfolgen und (n-k) Misserfolgen

Bemerkungen

Die zu einem n-stufigen Bernoulli-Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p gehörige Verteilung heißt Binomialverteilung mit den Parametern n und p. Die zugehörige Zufallsvariable X heißt binomialverteilt.
Mit dem befehl binompdf(n,p) erhält man die zugehörige Binomialverteilung im GTR.

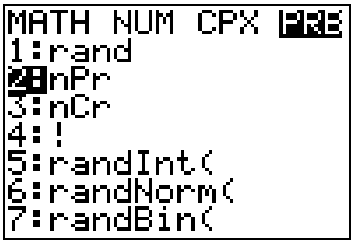
Auf $\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ kommt man auch beim Potenzieren eines Binoms:

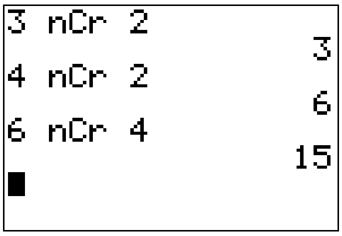
$$(p+q)^n=\binom{n}{0}\cdot p^0\cdot q^n+\binom{n}{1}\cdot p^1\cdot q^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot p^2\cdot q^{n-2}+...+\binom{n}{n}\cdot p^n\cdot q^0$$

Dieser allgemeine „binomische Lehrsatz“ gab der Binomialverteilung den Namen.

4) Bestimmung der Binomialkoeffizienten.

- Baumdiagramme zu aufwendig.
- Mit dem GTR als Black Box





(TI 84→ MATH → PRB)

Damit kann man bereits eine große Anzahl von Aufgaben behandeln:

Beispiel:
Eine Münze wird sechsmal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen
a) genau zwei Wappen,
b) höchstens zwei Wappen,
c) mindestens vier Wappen?

5) Mögliche Vertiefung: Berechnung der Binomialkoeffizienten - Pascaldreieck.

Man kann $\binom{4}{2}$ rekursiv aus den bekannten Anzahlen $\binom{3}{1}$ und $\binom{3}{2}$ bestimmen.

- Die $\binom{4}{2}$ Pfade mit genau zwei Treffern erhält man (*Geogebra → Binomi2)*

– aus den $\binom{3}{1}$ Pfaden mit einem Treffer bei dem Baum für n = 3 ergänzt durch einen Treffer.

– aus den $\binom{3}{2}$ Pfaden mit zwei Treffern bei dem Baum für n = 3 ergänzt durch eine Niete.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
....

- Daher gilt $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$ = 3 + 3 = 6.

Entsprechend gilt für k = 1, ... , n-1 allgemein:

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Das ist gerade die sehr einfache und eingängige Formel zur Berechnung des **Pascalschen Dreiecks**.
Die Binomialkoeffizienten sind also die Zahlen im Pascalschen Dreieck.

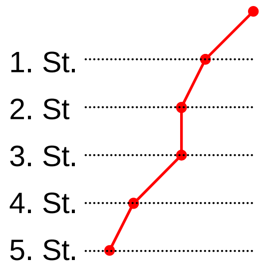
Möglichkeit B

Beispiel:

Multiple-Choice-Test: 5 Fragen, jeweils vier vorgegebene Antworten, von denen nur eine richtig ist. Ein Kandidat kreuzt rein zufällig je eine Antwort an.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau 3 richtige Antworten?

- Zeichnen des ganzen Baumes sehr mühsam. (Vielleicht Teilbaum?)
- Aber jeder Pfad für X = 3 hat die Wahrscheinlichkeit $p^3 \cdot q^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{1024}$.

1) Wie viele solche Pfade gibt es?



- Jeder Pfad besteht aus 5 Stationen.
- Verteilt man 3 Treffer auf 5 Stationen, so hat man für den **ersten Treffer** 5 Möglichkeiten.
- Zu jeder dieser Möglichkeiten gibt es für den **zweiten Treffer** 4 Möglichkeiten, insgesamt $5 \cdot 4$ Kombinationen.
- Zu jeder dieser Kombinationen gibt es für den **dritten Treffer** noch 3 Möglichkeiten.
- Insgesamt sind dies $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.

Da die Treffer nicht unterschieden werden, stellen jeweils 6 Möglichkeiten denselben Pfad dar:

1. St. ...
2. St. → T T T T T T
3. St. → T T T T T T
4. St.…
5. St. → T T T T T T

1. Auswahl
2. Auswahl
3. Auswahl

- Für die erste belegte Station hat man 3 Möglichkeiten, für die zweite 2 und für die dritte 1, insgesamt also: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.
- Alle 6 stellen den gleichen Pfad dar.
- Man hat also $\frac{60}{6} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ verschiedene Pfade für X = 3.
- Die Wahrscheinlichkeit beträgt somit: $P(X=3) = \frac{60}{6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 \cdot \frac{9}{1024} \approx 0{,}088$.

2) Verallgemeinern für k Treffer bei einer Bernoullikette der Länge n

$$P(X=k) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

3) Definition des Binomialkoeffizienten

$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!}$; $\binom{n}{0} = 1$ (es gibt nur einen Pfad mit 0 Treffern)

4) Binomialkoeffizienten mit dem GTR (s.o.)

3. Binomialverteilung

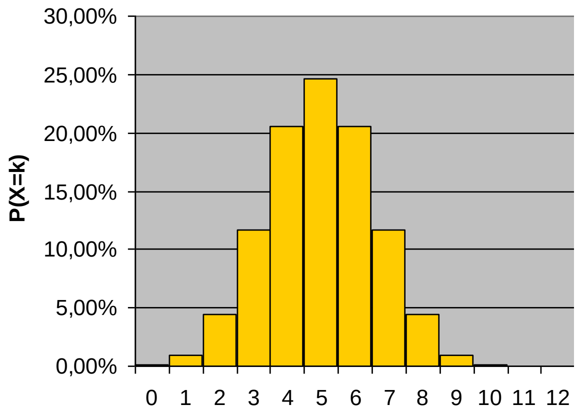
Wird die Trefferzahler bei einer Bernoullikette durch eine Zufallsvariable X beschrieben, so heißt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X **Binomialverteilung**. Es gilt:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Die Zufallsvariable X heißt **binomialverteilt** mit den Parametern n und p, kurz $B_{n;p}$ – verteilt.

1) Verteilungen und Diagramme von Hand, z.B. für n =10 und p =0,5.

k	P(X=k)
0	0,10%
1	0,98%
2	4,39%
3	11,72%
4	20,51%
5	24,61%
6	20,51%
7	11,72%
8	4,39%
9	0,98%
10	0,10%



2) Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen

Bei der Binomialverteilung ist die allgemeine Formel für den Erwartungswert relativ schwierig auszuwerten. Geht man - am besten an Beispielen - auf die Bedeutung des Erwartungswertes zurück, so kann aber (fast) jeder Schüler sofort eine Formel für den Erwartungswert bei einer binomialverteilten Zufallsvariablen angeben.

Beispiel:
Welche Trefferzahl wird man bei 30 Freiwürfen erwarten, wenn ein Basketballspieler mit 60% Wahrscheinlichkeit trifft?

Erwartungswert: $30\cdot\frac{60}{100}=18$ d.h. $\mu = E(X) = n\cdot p$

(Es reicht, die allgemeine Formel an einfachen Beispielen nachzurechnen.)

3) Arbeiten mit Schaubildern von binomialverteilten Zufallsvariablen

Excel → Binomialverteilung; Geogebra → Bimomver;

- Wie verändert sich das Diagramm mit wachsendem n?
- Welchen Einfluss hat die Trefferwahrscheinlichkeit p?
- Welche Trefferzahl hat die höchste Wahrscheinlichkeit?
- Bestimme aus dem Diagramm (s.o.) die Wahrscheinlichkeit für
  - genau vier Treffer
  - höchstens vier Treffer
  - mindestens 2 und höchsten 6 Treffer.

Galtonbrett → Programm u. Modell

4) Praxis der BV - Verwendung des GTR –

Die Zufallsvariable X ist $B_{25;0.4}$ - verteilt, d.h. n = 25 und p = 0,4.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für

a) genau 8 Treffer,

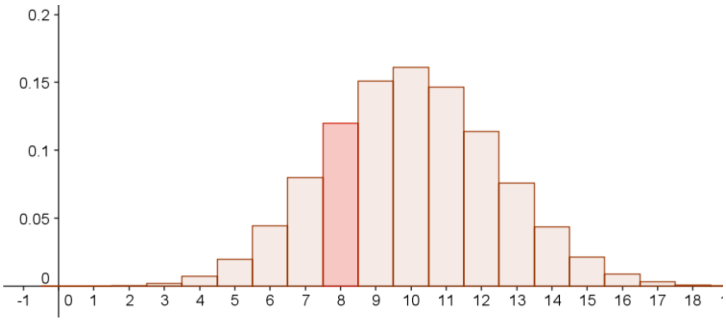
b) höchstens 10 Treffer,

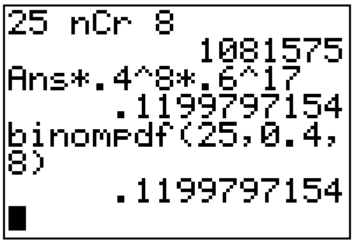
c) mindestens 11 Treffer

d) mindestens 7 und höchstens 10 Treffer?

(Geogebra → BinomVerSum)

a) genau 8 Treffer



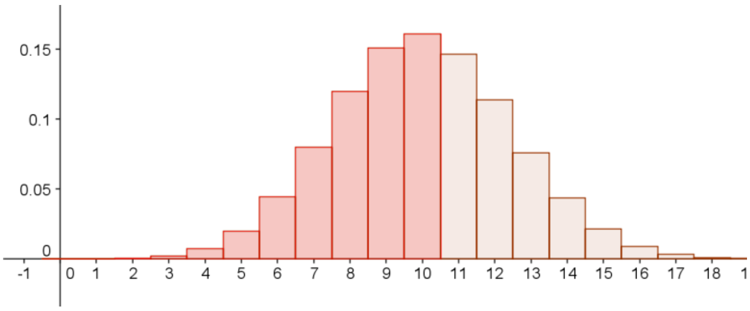


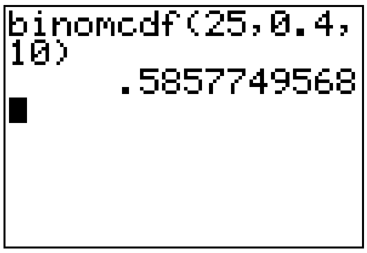
$P(X=8)=\binom{25}{8}\cdot 0{,}4^{8}\cdot 0{,}6^{17}\approx 0{,}120=12{,}0\%$ →

GTR: binompdf(n,p,k**)**

(TI 84: **DISTR → DISTR → A**)

b) höchstens 10 Treffer

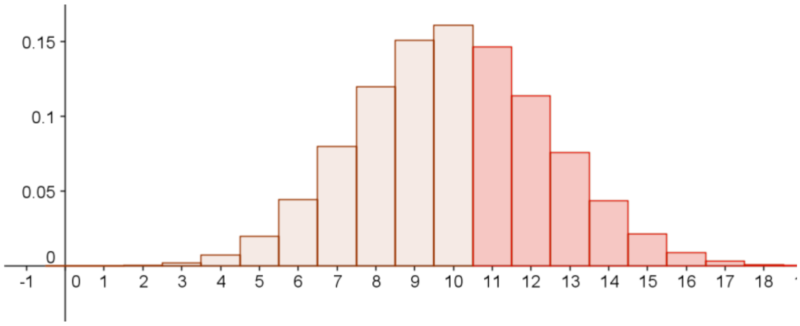


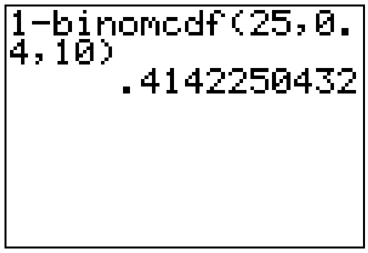


$P(X\leq 10)=P(X=0)+P(X=1)+...+P(X=10)$ ☺ *lieber gleich* → **GTR: binomcdf(**n,p,k**)**

(TI 84: **DISTR → DISTR → B**)

c) mindestens 11 Treffer

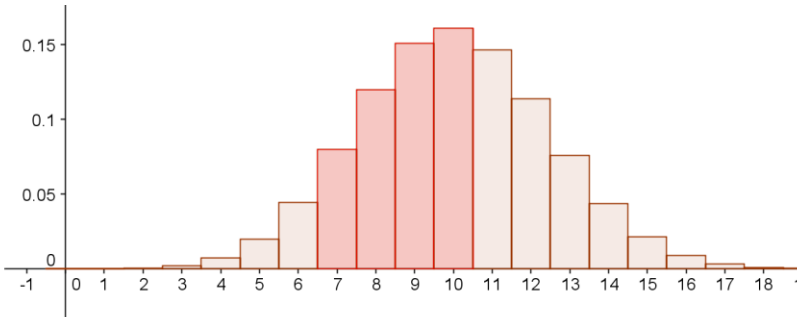


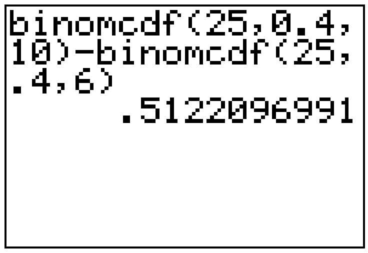


$$P(X \geq 11) = P(X = 11) + P(X = 12) + ... + P(X = 25)$$
$$= 1 - P(X \leq 10)$$

→ **GTR: binomcdf(**n,p,k**)**

d) mindestens 7 und höchstens 10 Treffer





$$P(7 \leq X \leq 10) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$
$$= P(X \leq 10) - P(X \leq 6)$$

→ **GTR: binomcdf(**n,p,k**)**

5) Ein kleine Anwendung – ein Geschmackstest

Es wird getestet, ob eine Klasse den Unterschied zwischen Leitungswasser oder Mineralwasser ohne Kohlensäure (Voll-/Magermilch) schmecken kann.
Der Versuchsleiter füllt (ohne dass es die Klasse sieht) der Reihe nach die mit A, B, C, D beschrifteten Becher je nach Ausfall eines Münzwurfs mit Voll- oder mit Magermilch.
Jeder Schüler probiert alle vier Proben mit einem Trinkhalm und notiert seine Meinung.
Dann gibt der Testleiter das wirkliche Ergebnis bekannt, worauf jeder seine Trefferanzahl bestimmt.

Die Ergebnisse der Klasse werden in einer Tabelle zusammengefasst, z. B.

Trefferzahl	0	1	2	3	4
absolute Häufigkeit	3	5	8	9	2
relative Häufigkeit	11%	19%	30%	33%	7%

Wäre die Klasse keine „Schmeckerklasse", so hätte man auch 4 mal eine Münze werfen können.
Die Wahrscheinlichkeiten für die Trefferzahlen dieser einfachen Bernoulli-Kette wären:

Trefferzahl	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
	6%	25%	38%	25%	6%

Wenn in der Tabelle der relativen Schätzhäufigkeiten der Klasse für 3 und 4 deutlich höhere Werte auftreten, so kann man zumindest beim überwiegenden Teil der Klasse davon ausgehen, dass die Wassersorten geschmacklich unterschieden werden.
Wichtig: Sammeln eigener Erfahrungen über Zufallsschwankungen. Vergleich mit eigenen Erwartungen: Es kann sein, dass „Nix - Schmecker" vergleichsweise gut abschneiden (Vorbereiten des Begriffs der Irrtumswahrscheinlichkeit).

Variation der Produkte:
a) teure/billige Kartoffelchips (Erdnüsse, Erdnuss-Flips, Salzstangen),
b) verschiedene Sorten Cola,
c) Orangen-Nektar/Orangen-Fruchtsaftgetränk,
d) frischen/aus Konzentrat rückverdünnten Orangensaft (beides in gekauften Flaschen),
e) Vollmilch/Magemilch,
f) verschiedene Sorten Vollmilch-Schokolade (vorher reiben).