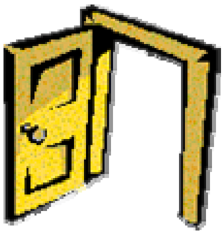
Mögliche Einstiege und Grundprinzip



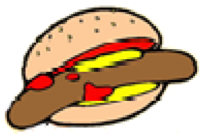
1) Erwischt – Steuerprüfung mit statistischen know-how

Nach T. Leuders *Erwischt !* in Mathematik lehren 153

- Betriebsprüfung bei einem Schnellimbiss für die Jahre 1998 – 2000

  (Die vorliegenden Daten (*Erwischt.xls*) sind authentisch.)
- Stichprobe: Die letzte Ziffer vor dem Komma (s.u., Stichprobenumfang: 1000).

Stichprobe:									
5	4	6	8	8	8	9	3	2	3
8	8	0	1	9	8	8	7	0	8
8	8	0	1	5	6	1	2	5	3
8	8	3	9	2	3	9	7	1	3
9	4	6	7	4	1	3	5	2	3



(*Hinweis auf Benford-Verteilung*)

- Echt oder künstlich erzeugt (gefälscht) ?

Wie gut können Menschen den Zufall simulieren ?

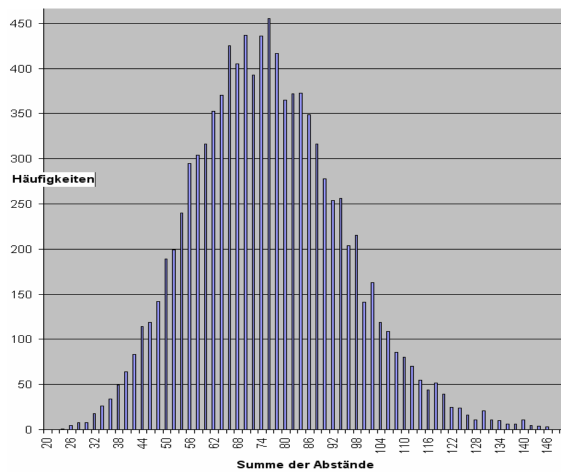
- Idee: Jede Ziffer sollte mit der Häufigkeit 100 auftreten.
- Kennzahl für die Abweichung: Abstandssumme

$$\boxed{\text{Kennzahl: } K = |n_0 - 100| + |n_1 - 100| + \ldots + |n_9 - 100|}$$

Auswertung der Stichprobe:

Ziffer	Häufigkeit	Abstand
0	76	24
1	120	20
2	88	12
3	98	2
4	93	7
5	109	9
6	103	3
7	88	12
8	109	9
9	116	16
Summe:	1000	114

Vergleich mit einer Simulation (Excel), Ergebnisse (10 000 Simulationen):



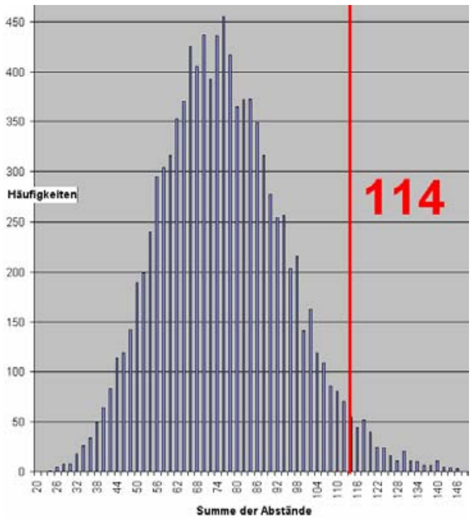
114	55
116	44
118	52
120	39
122	25
124	24
126	16
128	11
130	21
132	11
134	10
136	6
138	6
140	11
142	5
144	4
146	3
148	0
150	0
152	0
154	0
156	1
158	1
160	0
Summe:	**345**

Folgerungen:

- Die Abstandssumme 114 ist ungewöhnlich, kann aber zufällig entstanden sein.
- Es gilt der Grundsatz: „In dubio pro reo.“
- Eine Abstandssumme von **114 oder mehr** tritt nur in etwa 3,5 % aller Fälle auf !
    - Das ist verdächtig ! Eine Untersuchung des Betriebes wird angeordnet.
- Eine Abstandssumme von 80 tritt in etwa 4 % aller Fälle auf !

  Ist das auch verdächtig ?

Sind wir zu streng ?



- Erhöhen des kritischen Wertes auf z.B. 130:
    - Gefahr, dass ein Unschuldiger in Verdacht gerät, nimmt ab. (Fehler 1. Art nimmt ab.)
    - Die Anzahl der Übeltäter, die nicht erfasst werden, nimmt zu. (Fehler 2. Art nimmt zu.)
- Herabsetzen des kritischen Wertes auf z.B. 100:
    - Gefahr, dass ein Unschuldiger in Verdacht gerät, nimmt zu. (Fehler 1. Art nimmt zu.)
    - Die Anzahl der Übeltäter, die nicht erfasst werden, nimmt ab. (Fehler 2. Art nimmt ab.)

Weitere mögliche Modelle:

- Kennzahl: Spannweite der Häufigkeiten

  $\boxed{\text{Kennzahl: } K = \max(n_0;...;n_9) - \min(n_0;...;n_9)}$

- Kennzahl: Summe aller Abstände der Häufigkeiten voneinander

  $\boxed{\text{Kennzahl: } K = \max(n_0;...;n_9) - \min(n_0;...;n_9)}$

2) Das Taxiproblem (nach Arthur Engel)

Die Taxen in Frankfurt sind numeriert: 1; 2; 3; … .

Nach Auskunft des Taxifahrers gibt es in Frankfurt 3000 Taxen.

Danach beobachte ich 4 Taxen mit den Nummern 512; 987; 355; 1200.

- **Annahme**: Der Taxifahrer hat recht.
  Die Wahrscheinlichkeit, ein Taxi mit einer Nummer kleiner oder gleich 1200 anzutreffen, beträgt dann $\frac{1200}{3000}$.
  Die Wahrscheinlichkeit, 4 solche Taxen anzutreffen, beträgt
  $\left(\frac{1200}{3000}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 2{,}56\%$.
- **Entscheidung**: Dieser Zahlenwert ist ein Indiz gegen die Annahme.
  Ich lehne die Aussage des Taxifahrers ab.
- **Aber**: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,6 % habe ich zufällig 4 Taxen mit einer Nummer kleiner oder gleich 1200 unter den 3000 erwischt.
  Dann hat der Taxifahrer doch recht.
  Meine **Irrtumswahrscheinlichkeit** beträgt 2,6 %.

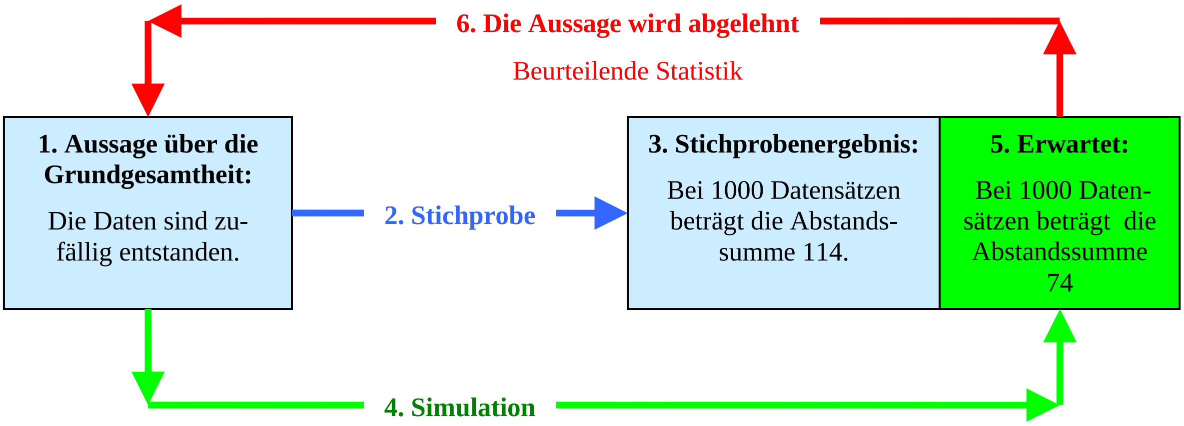
Testen von Hypothesen

- Die beiden Beispiele spiegeln die Grundkonstruktion eines Hypothesentests wider.
  - Hier: Durchführung eines Tests **auf der Stufe des inhaltlichen Argumentierens**
- Die Grundfrage beim Testen von Hypothesen lautet:
  Ist das Stichprobenergebnis verträglich mit dem zu erwartenden Ergebnis oder weicht das Ergebnis signifikant ab ? (vgl. Schema)

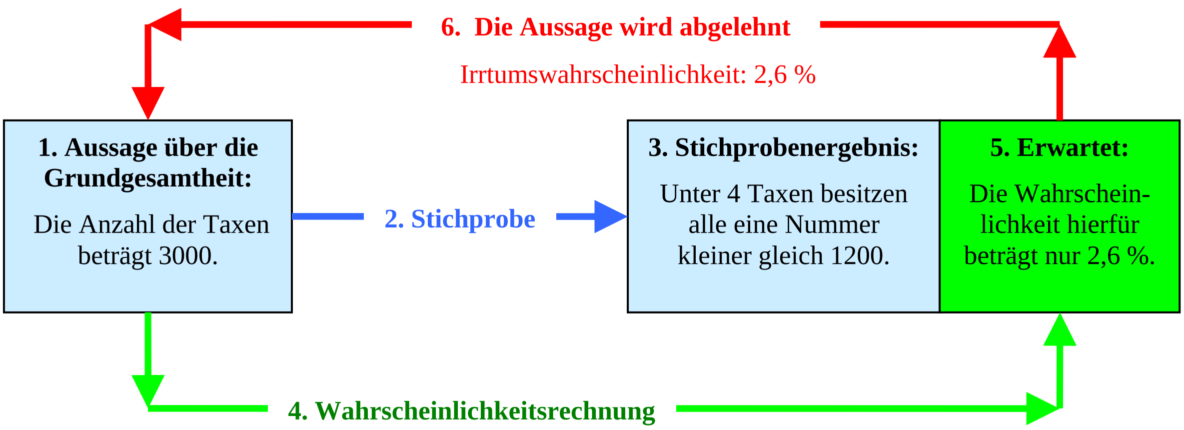
(Statistische Signifikanz:
In der Statistik heißen Unterschiede oder Zusammenhänge signifikant, wenn die Wahrscheinlichkeit gering ist, dass sie durch Zufall zustande gekommen sind.)

Vorgehensweise im Schema:

Zu 1) Erwischt – Steuerprüfung mit statistischen know how



Zu 2) Das Taxiproblem



- Aufgrund des Stichprobenergebnisses kann also die Aussage über die Grundgesamtheit als unwahrscheinlich abgelehnt werden.
- Es ist aber andererseits prinzipiell nicht möglich, allein unter Verwendung eines Stichprobenergebnisses eine Aussage über die Grundgesamtheit zu „beweisen“.

3) Geschick oder Glück (nach Arthur Engel)

Unter den 9 Passagieren eines Flugzeugs befinden sich 5 ehrlich Leute und 4 Schmuggler.

a) Ein Zöllner greift zur Kontrolle 3 Personen heraus, und alle entpuppen sich als Schmuggler.
Besitzt der Zöllner ein besonderes Geschick oder hat er nur Glück gehabt ?

- **Annahme**: Der Zöllner hat nur Glück gehabt.
  Die Wahrscheinlichkeit, drei Schmuggler unter den 9 Personen herauszugreifen, beträgt $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{21}<\frac{1}{20}=5\%$.
  5 % wird von Statistikern oft als Grenze zwischen „kleinen“ und „großen“ Wahrscheinlichkeiten gewählt.
- **Entscheidung**: Dieser Zahlenwert ist ein Indiz gegen die Annahme.
  Der Zöllner hat Geschick; auf Grund seiner Erfahrung kann er einen Schmuggler oft erkennen.
- **Aber**: Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 5 % hat er zufällig 3 Schmuggler erwischt.
  Dann hat der Zöllner möglicherweise nur Glück gehabt..
  Meine **Irrtumswahrscheinlichkeit** beträgt etwa 5 %.

b) Der Zöllner greift nun zur Kontrolle 4 Personen heraus, unter denen sich 3 Schmuggler befinden.
Besitzt der Zöllner ein besonderes Geschick oder hat er nur Glück gehabt ?

- **Annahme**: Der Zöllner hat nur Glück gehabt.
  Die Wahrscheinlichkeit, drei oder mehr Schmuggler unter den 9 Personen heraus-zugreifen, beträgt $4\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}+\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}=4\cdot\frac{5}{126}+\frac{1}{126}\approx 17\%$.
- **Entscheidung**: Dieser Zahlenwert spricht nicht gegen die Annahme.