Thema der Unterrichtseinheit: Abstand Punkt/Gerade	
Methode: Abgestufte Hilfestellung / Aufgaben zur Wahl / (Marktplatz der Möglichkeiten)	Zeitbedarf: 45 Minuten + 45 Minuten Integrationsphase
Anzahl der Abstufungen: 4	

Stufe	Kompetenzerwerb
A	• Vorgegebene Teilschritte eines neuen Verfahrens in die richtige Reihenfolge bringen • Ein neues Verfahren selbstständig anwenden • Alternative Verfahren kennen
B	• Ein neues Verfahren mit Hilfestellung entwickeln • Ein neues Verfahren selbstständig anwenden • Alternative Verfahren kennen
C	• Ein neues Verfahren mit geringer Hilfestellung entwickeln • Ein neues Verfahren selbstständig anwenden • Alternative Verfahren kennen
D	• Ein neues Verfahren selbstständig entwickeln. • Alternative Verfahren entwickeln und beurteilen.

Bemerkungen

Der Abstand eines Punktes zu einer Geraden kann auf vielfältige Weise bestimmt werden. Den Schülern werden drei Wege zur Erarbeitung angeboten (Hilfsebene, orthogonale Verbindungslinie, Extremwertaufgabe).

Für jeden Weg gibt es drei Abstufungen: ohne Hilfestellung, mit Hilfestellung, Sortieren der Teilschritte.

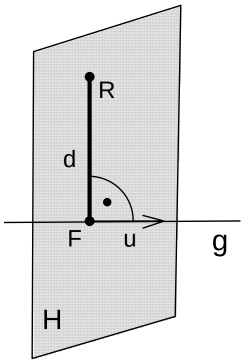
Die Schüler entscheiden selbstständig, welchen Weg sie wählen und wie viel Hilfe sie annehmen wollen. Leistungsstarke Schüler haben die Möglichkeit ohne Vorgaben und Hilfestellungen ein Verfahren zu entwickeln

Integrationsphase / Sicherung und Vertiefung

- Schülervorträge zur Präsentation der drei verschiedenen Lösungswege. Dies können auch Schüler, die auf Niveau A gearbeitet haben leisten.
- Vergleich und Diskussion der Lösungswege.

<table>
<tr><th></th><th>Aufgabenstellung</th></tr>
<tr><td>

A1



</td><td>

Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Hilfsebene“)

<u>Lösungsidee:</u>
Der Abstand des Punktes R von der Geraden g ist der Abstand von R zum Lotfußpunkt F. Wir erhalten diesen Lotfußpunkt F, wenn wir die Gerade g mit der Hilfsebene H schneiden, die orthogonal zu g ist und den Punkt R enthält.

Zur Berechnung von d sind drei Schritte nötig:

Schnittpunkt F der Geraden g mit der Hilfsebene H bestimmen.

Berechnen des Abstands der Punkte R und F.

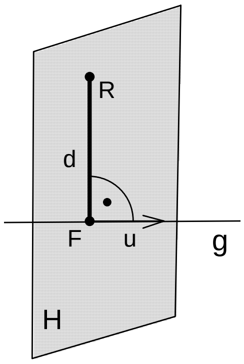
Aufstellen der Gleichung einer Ebene H , die R enthält und orthogonal zu g ist.

<u>Aufgabe:</u>
Sortieren Sie zunächst die Schritte in der richtigen Reihenfolge und führen Sie dann die nötigen Berechnungen durch für

R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in IR$

</td></tr>
<tr><td>

B1



</td><td>

Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Hilfsebene“)

<u>Lösungsidee:</u>
Der Abstand des Punktes R von der Geraden g ist der Abstand von R zum Lotfußpunkt F. Wir erhalten diesen Lotfußpunkt F, wenn wir die Gerade g mit der Hilfsebene H schneiden, die orthogonal zu g ist und den Punkt R enthält.

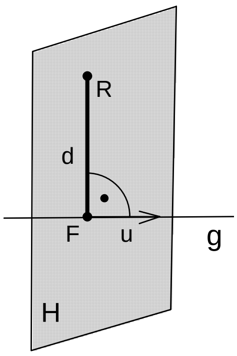
Zur Berechnung von d sind drei Schritte nötig.

<u>Aufgabe:</u>
Beschreiben Sie zunächst diese Schritte und führen Sie dann die nötigen Berechnungen durch für

R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in IR$

</td></tr>
<tr><td>

C1



</td><td>

Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Hilfsebene“)

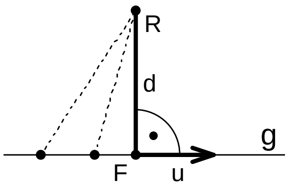
<u>Lösungsidee:</u> Siehe Skizze!

<u>Aufgabe:</u>
Beschreiben Sie zunächst Schritte zur Berechnung des Abstandes eines Punktes R von der Geraden einer Geraden g mithilfe einer Hilfsebene. Führen Sie dann die nötigen Berechnungen durch für

R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in IR$

</td></tr>
</table>

A2



Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Skalarprodukt“)

<u>Lösungsidee:</u>
Der Abstand des Punktes R von der Geraden g ist der Abstand von R zum Lotfußpunkt F. Dieser Lotfußpunkt F ist der einzige Punkt auf der Geraden g, für den der Vektor $\overrightarrow{FR}$ orthogonal ist zum Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g.

Zur Berechnung von d sind drei Schritte nötig:

Berechnen des Parameters t mit Hilfe der Bedingung $\overrightarrow{FR} \cdot \vec{u} = 0$

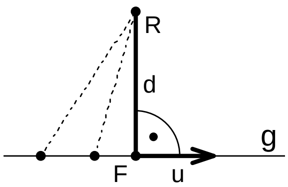
Berechnen des Abstands der Punkte R und F.

Angabe der Koordinaten von $F \in g$ in Abhängigkeit des Parameters t.

<u>Aufgabe:</u>
Sortieren Sie zunächst die Schritte in der richtigen Reihenfolge und führen Sie dann die nötigen Berechnungen durch für

R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in$ IR

B2



Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Skalarprodukt“)

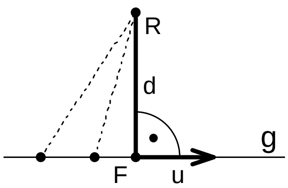
<u>Lösungsidee:</u>
Der Abstand des Punktes R von der Geraden g ist der Abstand von R zum Lotfußpunkt F. Dieser Lotfußpunkt F ist der einzige Punkt auf der Geraden g, für den der Vektor $\overrightarrow{FR}$ orthogonal ist zum Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g. Aus dieser Bedingung ergibt sich eine Gleichung.

<u>Aufgabe:</u>

Stellen Sie diese Gleichung auf für R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in$ IR

und berechnen Sie damit den Abstand von R zu g.

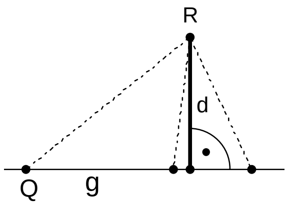
C2



Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Skalarprodukt“)

<u>Lösungsidee:</u> Aus der Skizze ergibt sich eine Bedingung (Gleichung), die für denjenigen Punkt $F \in g$ gilt, der die kürzeste Entfernung zum Punkt R hat.

<u>Aufgabe:</u>
Stellen Sie zunächst diese Gleichung auf.
Führen Sie dann die nötigen Berechnungen durch für

<table>
<tr>
<td>A3

</td>
<td>

Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Extremwertaufgabe“)

Lösungsidee:
Der Abstand des Punktes R von der Geraden g ist das Minimum des Abstandes zwischen R und einem beliebigen Punkt Q auf g.

Zur Berechnung dieses Minimums sind vier Schritte nötig:

Berechnen des Minimums der Zielfunktion.

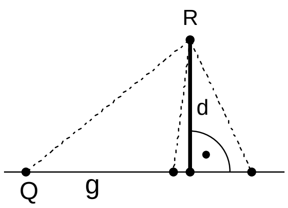
Berechnen des Abstands der Punkte R und F.

Angabe der Koordinaten von Q $\in$ g in Abhängigkeit des Parameters t.

Aufstellen der Zielfunktion d(t) = $|\overrightarrow{RQ}|$.

Aufgabe:
Sortieren Sie zunächst die Schritte in der richtigen Reihenfolge und führen Sie dann die nötigen Berechnungen durch für

R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; t $\in$ IR

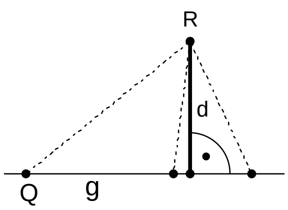
</td>
</tr>
<tr>
<td>B3

</td>
<td>

Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Extremwertaufgabe“)

Lösungsidee:
Der Abstand des Punktes R von der Geraden g ist das Minimum des Abstandes zwischen R und einem beliebigen Punkt Q auf g. Gesucht ist also der Punkt Q auf g, für den der Abstand zu R minimal wird. Damit geht es um die Lösung einer Extremwertaufgabe.

Aufgabe: Berechnen Sie den Abstand des Punktes R(3|0|-8) von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; t $\in$ IR.

Stellen Sie dazu die Zielfunktion auf, die den Abstand von R zu einem beliebigen Geradenpunkt Q beschreibt (in Abhängigkeit von t) und bestimmen Sie das Minimum dieser Zielfunktion.

</td>
</tr>
<tr>
<td>C3

</td>
<td>

Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Extremwertaufgabe“)

Lösungsidee:
Gesucht ist der Punkt Q auf g, für den der Abstand zu R minimal wird. Damit geht es um die Lösung einer Extremwertaufgabe.

Aufgabe: Lösen Sie diese Extremwertaufgabe bei der Berechnung des Abstandes des Punktes R(3|0|-8) von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$,t $\in$ IR.

</td>
</tr>
</table>

D	**Abstand eines Punktes von einer Geraden** <u>Aufgabe:</u> Entwickeln Sie ein Verfahren zur Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden und führen Sie dieses Verfahren am Beispiel von R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$; durch. Überlegen Sie, ob es weitere Verfahren zur Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden gibt, die ggf. einfacher durchzuführen sind.