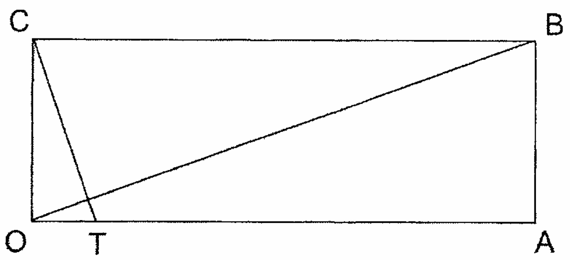
Aufgabe (Abitur BW 2009, Aufgabe II.2)

Das Rechteck OABC ist dreimal so lang wie breit.

Für den Punkt T gilt $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{9}\,\overrightarrow{OA}$.

Zeigen Sie, dass die Strecken OB und TC orthogonal sind.



<u>Hinweise zur Lösung der Aufgabe:</u>

Wenn Sie bei der Lösung der Aufgabe Hilfe benötigen, so können Sie zwischen folgenden Möglichkeiten wählen:

Blatt	**Umfang der Hilfestellung**	**Beweismethode**
A1	größer (Beweispuzzle)	mit Einführung von Koordinaten
B1	geringer (Lücken ergänzen)	
A2	größer (Beweispuzzle)	ohne Einführung von Koordinaten
B2	geringer (Lücken ergänzen)	

A1

Beweis mit Hilfe des Skalarprodukts ohne Einführung von Koordinaten / Beweispuzzle

Sortieren Sie Voraussetzung und Behauptung aus und bringen Sie die Beweisschritte in die richtige Reihenfolge.

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ | Viereck OABC ist ein Rechteck, d. h. | $|\overrightarrow{OA}| = 3 \cdot |\overrightarrow{OC}|$

$= 0 + \frac{1}{9} \cdot |\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2 + 0$ | zeige: $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CT} = 0$ | $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CT} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{OC} + \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OA}\right)$

OA ist dreimal so lang wie OC, d. h. | $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{CT}$ | $\overrightarrow{CT} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OT} = -\overrightarrow{OC} + \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$ | $= \frac{1}{9} \cdot \left(3 \cdot |\overrightarrow{OC}|\right)^2 - |\overrightarrow{OC}|^2 = 0$ | $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OA}$ | $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$

$= -\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{1}{9} \cdot \left(\overrightarrow{OA}\right)^2 - \left(\overrightarrow{OC}\right)^2 + \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$ | $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$

B1

Beweis mit Hilfe des Skalarprodukts ohne Einführung von Koordinaten / Lücken schließen

Schließen Sie die Lücken in folgendem Beweis und führen Sie ihn zu Ende.

Voraussetzung:

Viereck OABC ist ein Rechteck, d. h. $\overrightarrow{OA} \perp$ ___ und $\overrightarrow{OA} =$ __ und __ $=$ __

OA ist dreimal so lang wie OC, d. h. __ $=$ ______

$\overrightarrow{OT} =$ ______

Behauptung: $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{CT}$

Beweis:

zeige: _______

$\overrightarrow{OB} =$ ___ $+$ ___ $= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{CT} =$ __ $+$ __ $= -\overrightarrow{OC} +$ ___ $\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CT} = ($________$) \cdot ($_________$) = \ldots$

A2

Beweis mithilfe des Skalarprodukts und Einführung von Koordinaten / Beweispuzzle

Sortieren Sie Voraussetzung und Behauptung aus und bringen Sie die Beweisschritte in die richtige Reihenfolge

$\boxed{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CT} =}$ $\boxed{\overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$ $\boxed{\text{zweidimensionales Koordinatensystem mit Ursprung O}}$

$\boxed{\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}}$ $\boxed{\text{T(1|0), A(9|0), B(9|3), C(0|3)}}$ $\boxed{\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{CT}}$ $\boxed{\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0}$

$\boxed{\text{zeige: } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CT} = 0}$

B2

Beweis mithilfe des Skalarprodukts und Einführung von Koordinaten / Lücken schließen

Schließen Sie die Lücken in folgendem Beweis und führen Sie ihn zu Ende.

Voraussetzung:

zweidimensionales Koordinatensystem mit Ursprung __, T(|), A(|), B(|), C(|)

Behauptung: _______

Beweis:

zeige: _________

$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CT} = \dots$