Aufgabe:
Entwickeln Sie ein Verfahren zur Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden und führen Sie dieses Verfahren am Beispiel von R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; t $\in$ IR; durch.

Überlegen Sie, ob es weitere Verfahren zur Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden gibt, die ggf. einfacher durchzuführen sind.

<u>Hinweise zu den angebotenen Hilfen:</u>

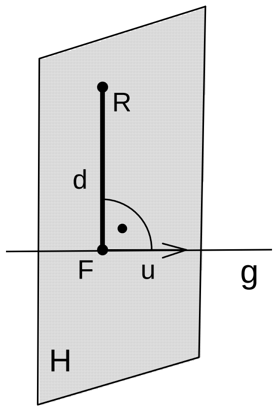
Sollten Sie Hilfe benötigen, so können Sie zwischen folgenden Hilfestellungen und Lösungswegen wählen:

		Lösungsverfahren		
		Methode 1 „Hilfsebene“	Methode 2 “Skalarprodukt“	Methode 3 „Extremwertaufgabe“
Umfang der Hilfe	groß	A1	A2	A3
	mittel	B1	B2	B3
	gering	C1	C3	C3

A1

Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Hilfsebene“)

<u>Lösungsidee:</u>
Der Abstand des Punktes R von der Geraden g ist der Abstand von R zum Lotfußpunkt F. Wir erhalten diesen Lotfußpunkt F, wenn wir die Gerade g mit der Hilfsebene H schneiden, die orthogonal zu g ist und den Punkt R enthält.



Zur Berechnung von d sind drei Schritte nötig:

Schnittpunkt F der Geraden g mit der Hilfsebene H bestimmen.

Berechnen des Abstands der Punkte R und F.

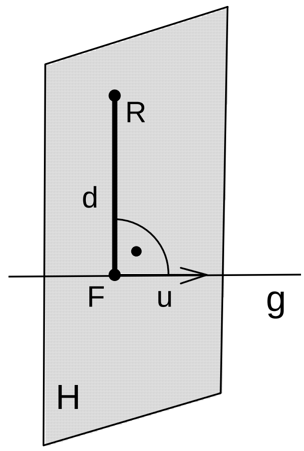
Aufstellen der Gleichung einer Ebene H , die R enthält und orthogonal zu g ist.

<u>Aufgabe:</u>
Sortieren Sie zunächst die Schritte in der richtigen Reihenfolge und führen Sie dann die nötigen Berechnungen durch für

R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

B1

Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Hilfsebene“)



<u>Lösungsidee:</u>
Der Abstand des Punktes R von der Geraden g ist der Abstand von R zum Lotfußpunkt F. Wir erhalten diesen Lotfußpunkt F, wenn wir die Gerade g mit der Hilfsebene H schneiden, die orthogonal zu g ist und den Punkt R enthält.

Zur Berechnung von d sind drei Schritte nötig.

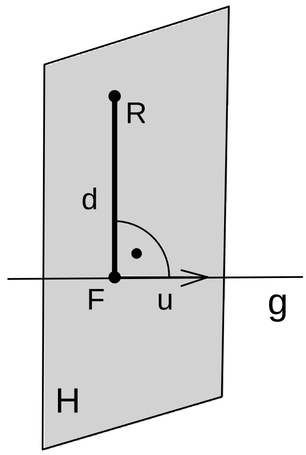
<u>Aufgabe:</u>
Beschreiben Sie zunächst diese Schritte und führen Sie dann die nötigen Berechnungen durch für

R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; t∈IR.

C1

Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Hilfsebene“)

<u>Lösungsidee:</u> Siehe Skizze!



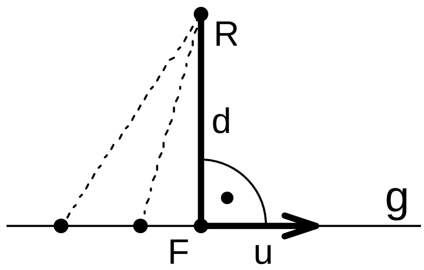
<u>Aufgabe:</u>
Beschreiben Sie zunächst Schritte zur Berechnung des Abstandes eines Punktes R von der Geraden einer Geraden g mithilfe einer Hilfsebene.
Führen Sie dann die nötigen Berechnungen durch für

R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; t∈IR

A2

Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Skalarprodukt“)

<u>Lösungsidee:</u>
Der Abstand des Punktes R von der Geraden g ist der Abstand von R zum Lotfußpunkt F. Dieser Lotfußpunkt F ist der einzige Punkt auf der Geraden g, für den der Vektor $\overrightarrow{FR}$ orthogonal ist zum Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g.



Zur Berechnung von d sind drei Schritte nötig:

Berechnen des Parameters t mit Hilfe der Bedingung $\overrightarrow{FR} \cdot \vec{u} = 0$

Berechnen des Abstands der Punkte R und F.

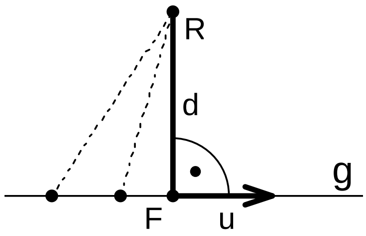
Angabe der Koordinaten von F $\in$ g in Abhängigkeit des Parameters t.

<u>Aufgabe:</u>
Sortieren Sie zunächst die Schritte in der richtigen Reihenfolge und führen Sie dann die nötigen Berechnungen durch für

R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; t $\in$ IR

B2

Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Skalarprodukt“)



Lösungsidee:
Der Abstand des Punktes R von der Geraden g ist der Abstand von R zum Lotfußpunkt F. Dieser Lotfußpunkt F ist der einzige Punkt auf der Geraden g, für den der Vektor $\overrightarrow{FR}$ orthogonal ist zum Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g. Aus dieser Bedingung ergibt sich eine Gleichung.

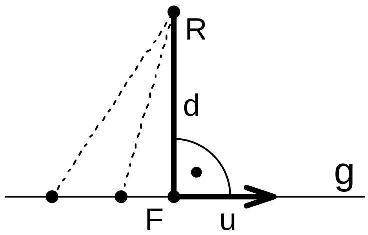
Aufgabe:

Stellen Sie diese Gleichung auf für R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in$ IR und

berechnen Sie damit den Abstand von R zu g.

C2

Abstand eines Punktes von einer Geraden (Methode „Skalarprodukt“)



Lösungsidee: Aus der Skizze ergibt sich eine Bedingung (Gleichung), die für denjenigen Punkt $F \in g$ gilt, der die kürzeste Entfernung zum Punkt R hat.

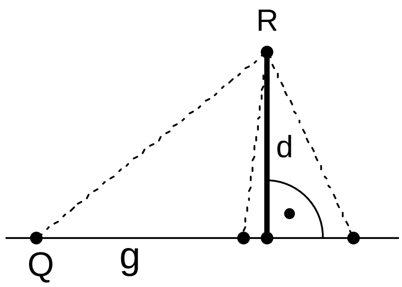
Aufgabe:
Stellen Sie zunächst diese Gleichung auf.
Führen Sie dann die nötigen Berechnungen durch für

R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in$ IR

A3

Abstand eines Punktes von einer Geraden
(Methode „Extremwertaufgabe“)

<u>Lösungsidee:</u>
Der Abstand des Punktes R von der Geraden g ist das Minimum des Abstandes zwischen R und einem beliebigen Punkt Q auf g.



Zur Berechnung dieses Minimums sind vier Schritte nötig:

Berechnen des Minimums der Zielfunktion.

Berechnen des Abstands der Punkte R und F.

Angabe der Koordinaten von $Q \in g$ in Abhängigkeit des Parameters t.

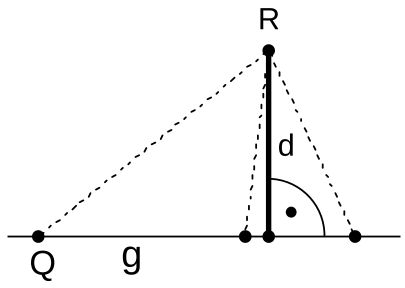
Aufstellen der Zielfunktion
d(t) = $|\overrightarrow{RQ}|$.

<u>Aufgabe:</u>
Sortieren Sie zunächst die Schritte in der richtigen Reihenfolge und führen Sie dann die nötigen Berechnungen durch für

R(3|0|-8) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

B3

Abstand eines Punktes von einer Geraden
(Methode „Extremwertaufgabe“)



Lösungsidee:
Der Abstand des Punktes R von der Geraden g ist das Minimum des Abstandes zwischen R und einem beliebigen Punkt Q auf g. Gesucht ist also der Punkt Q auf g, für den der Abstand zu R minimal wird. Damit geht es um die Lösung einer Extremwertaufgabe.

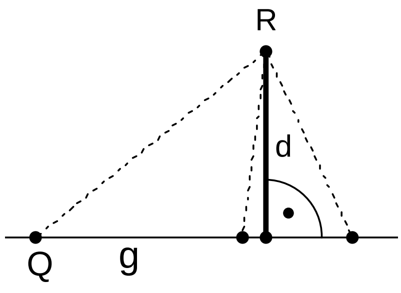
Aufgabe: Berechnen Sie den Abstand des Punktes R(3|0|-8) von der Geraden g:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in IR$.

Stellen Sie dazu die Zielfunktion auf, die den Abstand von R zu einem beliebigen Geradenpunkt Q beschreibt (in Abhängigkeit von t) und bestimmen Sie das Minimum dieser Zielfunktion.

C3

Abstand eines Punktes von einer Geraden
(Methode „Extremwertaufgabe“)



Lösungsidee:
Gesucht ist der Punkt Q auf g, für den der Abstand zu R minimal wird. Damit geht es um die Lösung einer Extremwertaufgabe.

Aufgabe: Lösen Sie diese Extremwertaufgabe bei der Berechnung des Abstandes des Punktes R(3|0|-8) von der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$,$t \in IR$.