Planarbeit zum Thema Stammfunktionen

verwendetes Schulbuch: Lambacher Schweizer Kursstufe (2009)

Aufgabe 1: Aufleiten statt Ableiten - von der Ableitung zur ursprünglichen Funktion

Füllen Sie die folgenden Tabellen aus.

a)

$f(x)$	x^2	$2x^3 - 4x$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{2}{x^2}$	$5\sqrt{x}$	$\sqrt{2x+4}$	$5\sin(2x)$
$f'(x)$							

b) Kontrollieren Sie Ihre Lösungen mithilfe einer Probe durch Ableiten.

$f(x)$							
$f'(x)$	$3x^2$	$5x^4$	x^4	$2x^3 + 1$	$4x^{-2}$	$-\frac{2}{x^3}$	$\frac{5}{2\sqrt{5x-3}}$

Information 1: Was ist eine Stammfunktion?

In Aufgabe 1b haben Sie zu einer gegebenen Ableitung die ursprüngliche Funktion gesucht. Das heißt: Sie haben eine Funktion f gesucht, die abgeleitet f'(x) ergibt. Oft bezeichnet man die gegebene Ableitung nicht mit f' sondern mit f und die ursprüngliche Funktion mit F. Diese Funktion F nennt man <u>Stammfunktion von f.</u>

<u>Definition:</u> Eine Funktion F heißt Stammfunktion einer Funktion f auf einem Intervall I, wenn für alle $x \in I$ gilt: $F'(x) = f(x)$.
Man kann Stammfunktionen als „Mütter oder Väter der Funktion“ bezeichnen und die Ableitung von einer Funktion als „Kinder der Funktion“, sie sind also die „Enkel der Stammfunktionen“. Dieser Vergleich trifft die Situation im „Reich der Funktionen“ aber nicht ganz, denn eine Funktion hat höchstens eine Ableitung, aber unendlich viele Funktionen als Stammfunktionen.

Stammfunktionen von f: **F_1** **F_2** **F_3** …

„aufleiten“

gegebene Funktion f **f**

ableiten

Ableitungsfunktion von f: **f'**

Aufgabe 2: Eine Funktion f und viele Stammfunktionen von f

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x - 4$.

a) Geben Sie die Gleichung einer Stammfunktion F von f an.
Zeichnen Sie das Schaubild von f und das Schaubild von F in ein geeignetes Koordinatensystem.

b) Geben Sie die Gleichungen von drei weiteren Stammfunktionen F_2, F_3 und F_4 von f an. Worin unterscheiden sich die Terme dieser drei Funktionen? Wie zeigen sich diese Unterschiede im Schaubild?

<u>Hinweis:</u> Wenn Sie keine Idee haben, wie Sie diese Aufgaben lösen können, dann informieren Sie sich in Ihrem Buch (S. 97 Beispiel 1b)

c) <u>Zusatzaufgabe:</u> Beweisen Sie den folgenden Satz:

Sind F und G Stammfunktionen derselben Funktion f, dann gibt es einen Konstante c mit $G(x) = F(x) + c$.

<u>Tipp:</u> Betrachten Sie die Differenzfunktion $D(x) = F(x) – G(x)$ und leiten Sie diese ab.
Sollten Sie keine Beweisidee haben und mit diesem Tipp nichts anfangen können, so analysieren Sie den Beweis im Buch (S. 95 unten). Nennen Sie das entscheidende Argument im Beweis.

Aufgabe 3: „Aufleitungsregeln“

Zum Aufleiten muss man die Ableitungsregeln einfach nur umkehren.

a) Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

	Beispiele		Regel	
	Funktion f	Stammfunktion F von f mit F(0) = 0	Funktion f	Stammfunktion F von f mit F(0) = 0
Potenzregel	$f(x) = x^4$	$F(x) = \frac{1}{5}x^5$	$f(x) = x^r$, $r\neq-1$	F(x) =
	$f(x)= x^{-3}$			
	$f(x) = x^0 = 1$			
Faktorregel	$f(x) = 5 \cdot\cos(x)$		$f(x) = c\cdot g(x)$ $c \in IR$	F(x) =
	$f(x) = 3x^2$			
	$f(x) = 4$			

Summen-regel	$f(x) = x^2 + 2x^3$		$f(x) = u(x) + v(x)$	$F(x) =$
	$f(x) = \sin(x) - x$			
Kettenregel (innere Fkt. ist linear)	$f(x) = (4x - 3)^2$		$f(x) = u(ax + b)$	$F(x) =$
	$f(x) = \sin(2 - 3x)$			

d) Vergleichen Sie mit dem Aufleitungsregeln in Ihrem Buch auf S. 100. Ergänzen bzw. korrigieren Sie.

e) Formulieren Sie die Aufleitungsregel für Potenzen in Worten.
<u>Zusatzaufgabe:</u>
Begründen Sie, warum die Potenzregel nur für Exponenten $r \neq -1$ gültig ist.
Skizzieren Sie näherungsweise den Graphen einer Funktion, deren Ableitung die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ ist.

Aufgabe 4:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 \cdot \cos(x)$.
Zeigen Sie durch Ableiten, dass $F(x) = \frac{1}{4}x^4 \cdot \sin(x)$ keine Stammfunktion von f ist.

Information 2: Grenzen des Aufleitens

Sie kennen weitere Ableitungsregeln, deren Umkehrung Sie in der obigen Tabelle vermissen, die Produktregel, die Quotientenregel und die Kettenregel für beliebige innere Funktionen. Leider gibt es keine (einfachen) Aufleitungsregeln für Produkte, Quotienten und verkettete Funktionen. Beachten Sie insbesondere, dass Produktfunktionen nicht einfach aufgeleitet werden können, in dem man sie faktorweise aufleitet. Weitere Informationen zum Thema „Aufleiten von Produktfunktionen" finden Sie in Ihrem Buch (S. 118).

Aufgabe 5: Übungen zum Bestimmen von Stammfunktionen

<u>Pflichtaufgaben für alle:</u> Seite 101f Nr. 1, 2, 5; Seite 97 Nr. 3
Kontrollieren Sie durch Ableiten.

1 Bestimmen Sie eine Stammfunktion.

a) $f(x) = 0{,}5x^3$ b) $f(x) = \frac{1}{4}x^{-2}$ c) $f(x) = \frac{2}{5x^2}$ d) $f(x) = (2x + 2)^3$
e) $f(x) = 2\sin(x + 1)$ f) $f(x) = \cos(3x)$ g) $f(x) = x + 2\sin(2x)$ h) $f(x) = \cos(4x - \pi$
i) $f(x) = \frac{1}{3}e^{x+5}$ j) $f(x) = 1 + e^{0{,}5x}$ k) $f(x) = e^{\frac{2}{3}x+1}$ l) $f(x) = \frac{5}{2}e^{2x-2}$

2 a) $f(x) = \frac{5}{x}$ b) $f(x) = 3 \cdot \frac{1}{(x + 5)}$ c) $f(x) = \frac{-1}{2x}$ d) $f(x) = \frac{1}{(2x - 3)}$

3 Bestimmen Sie eine Stammfunktion F zu f mit $F(1) = 100$.

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = 5$ d) $f(x) = -x$ e) $f(x) = -10$

5 Skizzieren Sie zum Graphen von f den Graphen einer Stammfunktion von f.

a)

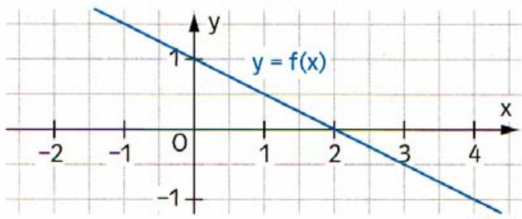

Fig. 4

b)

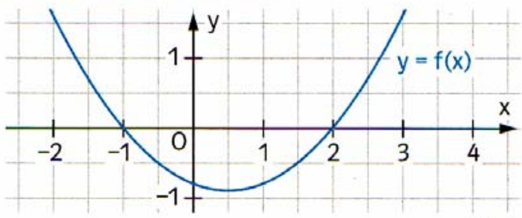

Fig. 5

<u>Aufgaben zur Wahl</u> (mindestens zwei Aufgaben sollen bearbeitet werden): S. 98 Nr. 7; S. 102 Nr. 11, 12, 6, 7

7 Untersuchen Sie, ob jeweils zwei der zu den Graphen gehörenden Funktionen eine Stammfunktion derselben Funktion f sein können.

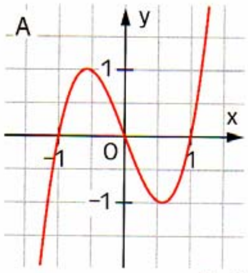

Fig. 1

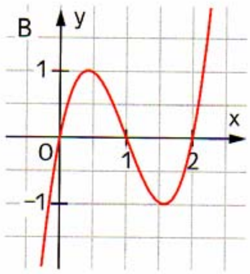

Fig. 2

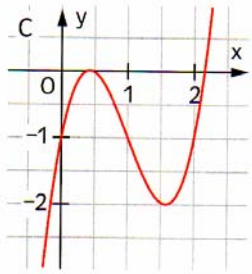

Fig. 3

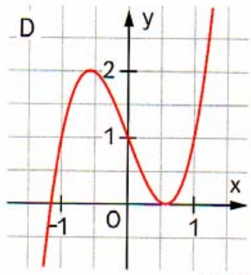

Fig. 4

11 Überprüfen Sie, ob F eine Stammfunktion von f ist.

a) $f(x) = e^x(1 + x)$; $F(x) = x \cdot e^{2x}$ b) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$; $F(x) = (\sin(x))^2$

12 Geben Sie eine Stammfunktion von f an. Schreiben Sie dazu den Funktionsterm als Summe.

a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^4}$ b) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{2x^2}$ c) $f(x) = \frac{1 + x + x^3}{3x^3}$ d) $f(x) = \frac{(2x + 1)^2 - 1}{x}$

6 In Fig. 1 ist der Graph einer Funktion f gezeichnet. F ist eine Stammfunktion von f. An welcher der markierten Stellen ist

a) F(x) am größten, b) F(x) am kleinsten,

c) f′(x) am kleinsten, d) F′(x) am kleinsten?

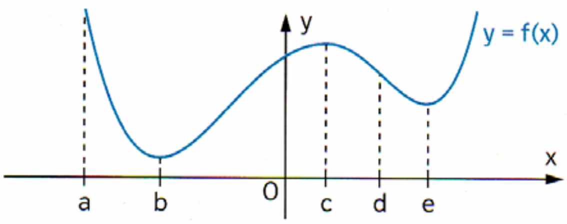

Fig. 1

7 In Fig. 2 ist der Graph einer Funktion h gezeichnet. H ist eine Stammfunktion von h mit $H(a) = 5$. Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und geben Sie an, ob die Funktionswerte von H, h und h′ an den Stellen a, b und c positiv, negativ oder null sind.

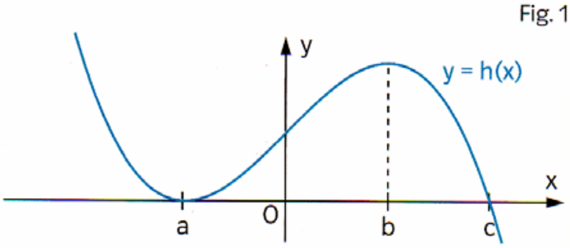

Fig. 2